

# 最適年金の理論\*

藤井 隆雄<sup>†</sup> 林 史明<sup>‡</sup> 入谷 純<sup>§</sup> 小黒一正<sup>¶</sup>

2012 年 7 月 8 日

## 概要

2 世代交代モデルを用いた部分均衡による最適年金の理論を提示する。家計の効用関数は 2 期間の消費と労働を変数とする。効用関数が 2 期間の消費に関して  $m$  次同次関数であるとき、最適年金の性質として次が得られる。(1) 人口成長率の時点による違いは各世代の年金の最適負担率の相対的な値には影響を及ぼさない。(2)  $m \neq 0$ ,  $m < 1$  の時、最適年金制度の陽表解を与えることができ、市場の時間選好率の社会厚生の時選好率にたいする比率の大きさが最適負担のありようにとって、決定的に重要である。

## 1 はじめに

本稿の目的は、簡単な OLG モデル (Overlapping Generation Model) に基づき、通時的な年金予算の制約の下で各世代の間接効用の総和を最大化する年金制度 (すなわち「最適年金制度」) の性質を探ることにある。その際、各世代の効用関数を可能な限り一般化した形で理論的に分析している点が、本稿の特徴の一つである。

周知のとおり、年金制度に関しては、賦課方式から積立方式に移行する際に社会厚生の改善可能性に焦点を当てた Feldstein [7], [8] をはじめ、お

---

\*本稿の初期の草稿には上東貴志教授 (神戸大学) より貴重な助言を頂いた。また、石田良主任研究官 (財務省財務総合政策研究所) からも有益な助言をいただいた。ここに感謝申し上げたい。なお、藤井と入谷は、科学研究費補助金 (基盤研究 (C) 課題番号: 24530349) から研究助成を受けている。

<sup>†</sup>神戸大学大学院経済学研究科准教授 E-mail:fujii@econ.kobe-u.ac.jp

<sup>‡</sup>神戸大学大学院経済学研究科博士後期課程 E-mail:082e527e@stu.kobe-u.ac.jp

<sup>§</sup>福山大学大学院経済学部教授 E-mail:iritani@fuec.fukuyama-u.ac.jp

<sup>¶</sup>一橋大学経済研究所准教授 E-mail:k-oguro@ier.hit-u.ac.jp

びただし数の研究がある。その多くは、制度や制度の変更が効率性や公平性にどのような効果を持つかを理論的・実証的に論証するものである。一方、最適な年金制度設計のための「最適年金制度」の研究は、ほとんどなされていない。例外的に、小黒 [13] は賦課方式の年金がもたらす厚生的なロスを考慮し、ロスの最小化が年金負担の平準化につながることを示している。

最適年金制度に関する研究が少ない背景には、最適課税理論との関係で、マクロ経済学の2つの潮流がもつ性質に関係している。一つは「代表的家計モデル」でのものであり、もう一つは「OLGモデル」でのものである。前者については、Barro [3], [4], Bohn [5] らによる課税の平準化やJudd [10] の動学的最適課税の議論が有名である。だが、代表的家計モデルには、そもそも「世代交代」が存在せず、世代間移転政策の一つである年金を扱いにくいという点がある。

他方、Samuelson [11] やDiamond [6] らによって定式化されたOLGモデルでは世代交代が前提であり、年金制度を扱うことができる。しかしながら、代表的家計モデルと異なり、モデルに登場する行動主体が世代の数だけ増加することから、理論的分析が複雑になる。このため、年金制度やその制度改革が各世代の効用に及ぼす影響について、Auerbach and Kotlikoff [1] の業績以降、多くの研究は多世代のOLGシミュレーションモデルを利用して実証分析を行う方向に向かっている。

そこで、本稿では最適年金制度の性質を明らかにするため、二世代のOLGモデルの枠組みに基づいた最適年金モデルを提示する。我々が本稿で尋ねる問題は通時的な年金予算の制約の下で各世代の間接効用の総和を最大化する年金制度はいかなる性質を持つかである。効用の総和が無限に発散しないよう整合的に扱うには、時間選好率によって効用を割引く必要がある。この時間選好率を社会的な時間選好率と呼び、市場の時間選好率である利子率と区別する。

我々は最適年金理論の第一歩を踏み出すために、そのプロトタイプとして、3つの単純化の仮定をおく。世代モデルでは無限の数の家計と無限の数の財を取り扱うことになる。一般均衡によって年金の最適性を考察すればモデルは極めて複雑になる。そのため、(i) 一般均衡を考えず、単純な部分均衡によって最適性を考察する。さらに、多くの国の年金制度が賦課方式でなされているという特徴がある。このため、本稿では、賦課方式の最適年金に焦点を当てる。年金の給付は、通常、報酬比例部分と定額部分に分かれるが、(ii) 本稿では報酬比例部分のみの年金を取り扱

うという単純化をする。また、(iii) 家計は2期間生存し、彼の効用は2期間の消費と労働に依存するという典型的な2世代重複モデルを採用する。そして、効用関数が2期間の消費に関して  $m$  次同次関数であると仮定する。

(i) を前提とすれば、賃金や利子率を与件として扱うことができる。一方、一般均衡モデルを採用すれば、賃金や利子率が年金の給付率や負担率の関数となり、最適年金の性質を求めることが極めて難しくなる。さらに、(ii) を考慮すると、家計の生涯の予算において、年金の給付と負担が共に所得の一定割合であるため、純負担率あるいは純給付率を決める問題となる。したがって、最適年金の理論は、Barro [3], [4], Bohn [5] らによる課税の平準化や Judd [10] の動学的最適課税の議論に類似したものとなる。また、(iii) を想定すれば、次の節で示される補助定理1と2で示されるように、社会厚生関数が極めて簡明になる。

われわれが本稿で提示する最適年金の性質は次のようである。

- (1) 人口成長率の時点による違いは各世代の純負担率（純給付率）の相対的な値には影響を及ぼさない。
- (2)  $m \neq 0, m < 1$  のとき,
  - (2-1) 最適年金制度は陽表的に解かれる。
  - (2-2) 賃金上昇率の高い世代の純負担率を低くする。
  - (2-3) 社会の時間選好率が市場のそれより十分大きいと、第  $i$  世代の人口成長率の上昇は各世代の最適年金の負担率を減少させる。
  - (2-4) 社会の時間選好率が市場のそれより大きい (resp. 小さい) と、将来世代の負担を100%に近づける (resp. 現在世代の負担を大きくし、将来世代の負担を小さくする)。
  - (2-5) 社会の時間選好率が市場のそれが一致すれば、年金の最適な純負担率は一定値に収束する（極限において負担の平準化が成立）。
- (3)  $m \geq 1$  のとき、せいぜい1世代を除いて、どの世代も100%を負担するか、0%を負担するかのどちらかに分かれる。

現実の年金制度設計において、(1) の持つ意味は重要である。すなわち、日本では少子化の進行とともに、年金負担が将来世代の負担を増加させるという危惧がある。しかし、この結果の意味していることは、世代の最適負担の比較に関する限り、人口の変動率は年金負担について中立的であるべきだということを主張している。人口成長率の影響は (2-3) に

あるように、全世代の負担率に影響を及ぼす。また、(2-2)は「最適年金の負担では、逆進的な制度が望ましい」ことを示している。

なお、本稿の分析では、各世代は利己的に行動しているとの前提を置いている。Barro [2] は、遺産の引継ぎがあり、各世代の効用が自己の消費のみでなく、子孫の効用からも影響を受けるような世代間の利他主義が成立するとき、基本的に OLG モデルは代表的家計モデルと同等になることを示している。だが、高山・麻生・宮地・神谷 [14] や Horioka [9] らは、遺産の分配について世代間利他主義はほとんどみられないと分析している。このため、本稿の前提である世代間利己主義は成立している可能性が高く、この点においても、最適年金制度の性質を探る意義は大きいものと考えられる。

本稿の構成は次の通りである。効用関数が二つの消費に関して同次関数であることを前提とすれば、間接効用がきわめて取り扱いが容易な形になることが示される。また、年金財政の予算が非ポージーゲーム条件の下で、一本の等式で表現できることを示す (第2節)。そして、社会厚生を最大化問題として、最適年金問題を定義する。最適な年金制度の陽表解が提示されるとともに、その含意が抽出される (第3節)。最後に、積み立て方式との関連を考察し、最適な年金制度においてはほとんど同じ議論が適用できることを示す (第4節)。

## 2 消費者選択と政府の予算

### 2.1 消費者の問題

各家計は2期間生存する。 $t$  期に生まれた家計の効用は

$$u(c_{1t}, c_{2t+1}, h_t), \quad u: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

である。 $c_{1t}, c_{2t+1}$  はそれぞれ、 $t$  期の消費、 $t+1$  期の消費、 $h_t$  は余暇である。効用関数について、

**仮定 1**  $u$  は内点において連続、狭義増加的、狭義準凹、消費の組  $(c_{1t}, c_{2t+1})$  に関して  $m$  次同次関数である

と仮定する。消費に関する  $m$  次同次性をのぞけば、これらは通常の望ましい性質である。もちろん  $m \neq 0$  である。 $0 < m < 1$  であれば、コブダグラス型の凹関数  $c_{1t}^\alpha c_{2t+1}^\beta h_t^\gamma$ ,  $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$  もこの効用関数のクラス

に入れることができる。 $\tau_t$ を年金の所得に対する負担率、 $\xi_{t+1}$ を負担したものの何倍を年金として受け取るかを表す給付率とする。若い時期に与えられている余暇の総量は1であるとする。予算制約は、利子率を  $r$  とすれば、

$$c_{1t} + s_t = (1 - \tau_t)w_t(1 - h_t), \quad c_{2t+1} = (1 + r)s_t + \xi_{t+1}\tau_t w_t(1 - h_t)$$

となる。これらを一本の予算にまとめると

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + r} + (1 - \theta_t)w_t h_t = (1 - \theta_t)w_t \quad (2)$$

である。ここで、 $\theta_t$  は実質的な負担率で

$$\theta_t = \tau_t - \xi_{t+1}\tau_t/(1 + r)$$

である。書き換えて、 $\xi_{t+1}\tau_t = (\tau_t - \theta_t)(1 + r)$  である。家計は  $r, w_t, \theta_t$  を所与とし、 $c_{1t}, c_{2t+1}, h_t$  の選択によって効用を最大化する。すなわち、添え字  $t$  を落として書けば、

$$\max u(c_1, c_2, h) \text{ subject to } c_1 + \frac{c_2}{1 + r} + (1 - \theta)wh = (1 - \theta)w \quad (3)$$

である。この解を  $c_1((1 - \theta)w, r), c_2((1 - \theta)w, r), h((1 - \theta)w, r)$  と書く。さらに、時間を表示した  $c_{1t}((1 - \theta)w, r), c_{2,t+1}((1 - \theta)w, r), h_t((1 - \theta)w, r)$ , について、関数形が同一であること、すなわち、

$$\forall t, \forall t' \quad \begin{cases} c_{1t}((1 - \theta)w, r) = c_{1t'}((1 - \theta)w, r), \\ c_{2,t+1}((1 - \theta)w, r) = c_{2,t'+1}((1 - \theta)w, r), \\ h_t((1 - \theta)w, r) = h_{t'}((1 - \theta)w, r), \end{cases} \quad (4)$$

が成立するのも明らかである。

小黒 [13] や小黒・中軽米・高間 [12] では  $m = 1$  の時、関数  $h_t$  が  $w_t$  に依存しないこと、さらに、 $c_{1t}$  と  $c_{2t+1}$  が  $w_t$  から分離可能であることが示されている。これに類似の内容を  $m \neq 0$  のケースでも成立する事を示すことができる。これが以下に見るように、厚生表現を著しく簡明にする。

**補助定理 1** 効用関数が仮定 1 を満たすならば、家計の問題の解  $h_t$  は  $r$  だけの関数であり、 $c_{1t}$  と  $c_{2t+1}$  が  $(1 - \theta_t)w_t$  から分離可能である。つ

まり,

$$\begin{cases} h_t((1 - \theta_t)w_t, r) = h_t(1, r), \\ c_{1t}((1 - \theta_t)w_t, r) = (1 - \theta_t)w_t c_{1t}(1, r), \\ c_{2t+1}((1 - \theta_t)w_t, r) = (1 - \theta_t)w_t c_{2t+1}(1, r) \end{cases} \quad (5)$$

が成立する。

[証明] (3) を参考にして,

$$\max_{\phi_1, \phi_2, h} u(\phi_1, \phi_2, h) \text{ subject to } \phi_1 + \frac{\phi_2}{1+r} + h = 1 \quad (6)$$

という問題を作る。(3), (6) の解をそれぞれ  $(c_1^*, c_2^*, h^*)$ ,  $(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{h})$  とする。 $(c_1^*/(1 - \theta)w, c_2^*/(1 - \theta)w, h^*)$  は (6) の予算を満たすので,

$$u(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{h}) \geq u(c_1^*/(1 - \theta)w, c_2^*/(1 - \theta)w, h^*) = u(c_1^*, c_2^*, h^*)/\{(1 - \theta)w\}^m$$

が成立する。逆に,  $((1 - \theta)w\hat{\phi}_1, (1 - \theta)w\hat{\phi}_2, \hat{h})$  は (3) の予算を満たすので,

$$u(c_1^*, c_2^*, h^*) \geq u((1 - \theta)w\hat{\phi}_1, (1 - \theta)w\hat{\phi}_2, \hat{h}) = \{(1 - \theta)w\}^m u(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{h})$$

となり,  $u(c_1^*, c_2^*, h^*) = u((1 - \theta)w\hat{\phi}_1, (1 - \theta)w\hat{\phi}_2, \hat{h})$  が成り立つ。効用関数が狭義準凹であるから, 最大化の解が一意であり,

$$c_1^* = (1 - \theta)w\hat{\phi}_1, \quad c_2^* = (1 - \theta)w\hat{\phi}_2, \quad h^* = \hat{h}$$

となる。(6) のパラメータには  $w(1 - \theta)$  が入っていないことから,

$$\begin{aligned} c_i((1 - \theta)w, r) &= c_i^* = (1 - \theta)w\hat{\phi}_i = (1 - \theta)w c_i(1, r), \quad i = 1, 2 \\ h((1 - \theta)w, r) &= h^* = \hat{h} = h(1, r) \end{aligned}$$

と考えることができる。以上によって (5) の成立を得る。■

効用を間接効用で表して, 補助定理 1 を利用すると,

$$\begin{aligned} V_t(\theta_t, r) &= u(c_{1t}((1 - \theta_t)w_t, r), c_{2t+1}((1 - \theta_t)w_t, r), h_t((1 - \theta_t)w_t, r)) \\ &= \{(1 - \theta_t)w_t\}^m \times \mu, \quad \mu := u(c_1(1, r), c_2(1, r), h_t(1, r)) \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。 $m < 1$  の場合には, 間接効用は  $1 - \theta_t$  の厳密な増加関数でありかつ狭義凹関数になっている。さらに,  $r$  が一定であると見なすことのできる環境では, 間接効用は可処分所得だけの関数になっている。

## 2.2 政府の予算

経済は  $t = 0$  の時点から始まり、高齢者と若年者がその時点から存在している。ゼロ期に政府が高齢者への移転  $G$  を決定し、その移転は税収と公債発行でまかなわれ、同時に、賦課方式の年金制度すなわち、 $(\tau_t, \xi_{t+1}), t = 0, 1, \dots$  を定めるとする。 $\tau_t$  は  $t$  期の若年者に対する負担率である。 $\xi_{t+1}$  は給付率であり、 $t$  期の若年者が  $t+1$  期に高齢者になり年金の給付を受けるときに、彼の年金負担のどれだけを受け取るかの率である。公債の発行額は内生変数であり、政府の予算を成立させるように決まると想定する。一方、年金制度  $(\tau_t, \xi_{t+1}), t = 0, 1, \dots$  があらかじめ与えられているとする。

時点  $t = 0$  における政府の予算は、

$$G = \tau_0 w_0 (1 - h_0) L_0 + B_0 \quad (8)$$

である。これは  $B_0$  の定義式と考えても良い。 $t \geq 1$  について、政府の予算制約は

$$\xi_t \tau_{t-1} w_{t-1} (1 - h_{t-1}) L_{t-1} + (1 + r) B_{t-1} = \tau_t w_t (1 - h_t) L_t + B_t \quad (9)$$

である。予算式 (8), (9) を成立させるように各  $B_t$  が決定される。このようにすることによって、 $\tau_t, \xi_{t+1}$  をパラメータとでき、モデルは逐次的に進行する。

**仮定 2** 利子率  $r$ 、第  $t$  期の賃金の成長率  $g_t$ 、人口成長率  $n_t$  はあらかじめ与えられている。更に初期値  $w_0, L_0$  も所与である。つまり、

$$w_t = w_0 \prod_{j=0}^{t-1} (1 + g_j), \quad L_t = L_0 \prod_{j=0}^{t-1} (1 + n_j)$$

である。また、ある正の実数  $0 < q < 1$  が存在して、

$$q(1 + r) > (1 + g_t)(1 + n_t), \quad t = 1, 2, \dots$$

を仮定する<sup>1</sup>。この仮定の意味は次の通りである。もし、 $(1 + r) < (1 + g_t)(1 + n_t)$  が任意の時点で成立すれば、所得の増加率は国債の利払いよ

<sup>1</sup>初期の草稿では、 $(1 + r) > (1 + g_t)(1 + n_t), t = 1, 2, \dots$  としていたが、これでは、 $\prod_{t=0}^{\infty} (1 + g_t)(1 + n_t) / (1 + r) = 0$  は必ずしも成立しない。この点については上東貴志教授 (神戸大学経済経営研究所) よりご指摘いただいた。

りも大きく、したがって、年金の負担を小さくして将来に負担させることができる。さらに、国民所得の割引現在価値が無限に発散する。これは、年金制度における負担を考える必要はなく、本質的に「最適年金制度」を考察する必要のない経済となる。

さらに、 $w_t$  はある正值に収束すると仮定する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_t = w > 0$$

この仮定は、財価格が1に基準化されているので、強い仮定ではない。

**注意：**次の関係

$$\theta_t > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{\xi_{t+1}}{1+r}, t = 0, 1, \dots$$

が成立する。 $\theta_t \leq 0$  の場合には、 $\xi_{t+1} \geq 1+r$  を考えることになる。

以上の準備のもとに次の定理を得る。この定理では、 $h_t$  は余暇の需要関数  $h_t((1-\theta_t)w_t, r)$  である。

**補助定理 2** 負担率  $\tau_t, t = 0, 1, \dots$  が予算 (8), (9) を満たし、非ポソジゲーム条件

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} = 0 \quad (10)$$

を満たすとす。このとき、政府予算が成立すれば、

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\theta_t I_t}{(1+r)^t} = G \quad (11)$$

が成立する。ここで、 $\theta_t = \tau_t - \xi_{t+1}\tau_t/(1+r)$ ,  $I_t = w_t(1-h_t)L_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$  である。

逆に、ある  $\theta_t \leq 1, t = 0, 1, \dots$  について (11) が成立するならば、 $\tau_t, B_t, t = 0, 1, \dots$  が存在して、(8), (9) を満たし、非ポソジゲーム条件 (10) が成立する。

[証明] (必要性) (9) を書き換えると、

$$(\tau_{t-1} - \theta_{t-1})w_{t-1}(1-h_{t-1})L_{t-1} + B_{t-1} = \frac{\tau_t w_t (1-h_t) L_t}{1+r} + \frac{B_t}{1+r}$$

である。ここで、 $t$  世代所得総額を  $I_t = w_t(1 - h_t)L_t$  と書いて整理をすると、

$$\theta_{t-1}I_{t-1} = \tau_{t-1}I_{t-1} + B_{t-1} - \frac{\tau_t I_t}{1+r} - \frac{B_t}{1+r}$$

を得る。上式に  $t = 1, \dots, n$  を代入すると、(8) を用いて、

$$\begin{cases} 0 = G - \tau_0 I_0 - B_0 \\ \theta_0 I_0 = \tau_0 I_0 + B_0 - \frac{\tau_1 I_1}{1+r} - \frac{B_1}{1+r} \\ \frac{\theta_1 I_1}{1+r} = \frac{\tau_1 I_1}{1+r} + \frac{B_1}{1+r} - \frac{\tau_2 I_2}{(1+r)^2} - \frac{B_2}{(1+r)^2} \\ \frac{\theta_2 I_2}{(1+r)^2} = \frac{\tau_2 I_2}{(1+r)^2} + \frac{B_2}{(1+r)^2} - \frac{\tau_3 I_3}{(1+r)^3} - \frac{B_3}{(1+r)^3} \\ \vdots \\ \frac{\theta_n I_n}{(1+r)^n} = \frac{\tau_n I_n}{(1+r)^n} + \frac{B_n}{(1+r)^n} - \frac{\tau_{n+1} I_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} - \frac{B_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \end{cases} \quad (12)$$

となる。これらを加えて、

$$\sum_{t=0}^n \frac{\theta_t I_t}{(1+r)^t} = G - \frac{\tau_{n+1} I_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} - \frac{B_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{n+1} I_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} &\leq \frac{\tau_{n+1} w_{n+1} L_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \\ &= \frac{\tau_{n+1} w_0 \prod_{t=0}^n (1+g_t) L_0 \prod_{t=0}^n (1+n_t)}{(1+r)^{n+1}} \\ &= \tau_{n+1} w_0 L_0 \prod_{t=0}^n \frac{(1+g_t)(1+n_t)}{(1+r)} \end{aligned}$$

である。したがって、 $(1+g_t)(1+n_t)/(1+r) < q < 1$  であれば、これはゼロに収束する。さらに非ポソジゲーム条件 (10) より、一連の政府の予算制約は、

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\theta_t I_t}{(1+r)^t} = G$$

にまとめられる。

(十分性) 初期の移転額  $G$  が与えられ,  $\theta_t \leq 1, t = 0, 1, \dots$  が (11) を満たしたとする。  $\theta_t = 1$  であれば,  $\xi_{t+1} = 0, \tau_t = 1$  とすれば,  $\theta_t = \tau_t - \tau_t \xi_{t+1}/(1+r)$  を満たす。  $\theta_t < 1$  であれば, 十分小さな正の  $\xi_{t+1}$  を与えると,  $\tau_t \leq 1$  と  $\theta_t = \tau_t - \tau_t \xi_{t+1}/(1+r)$  を満たすように  $\tau_t$  を定めることができる。このように,  $\theta_t$  の値から  $\theta_t = \tau_t - \tau_t \xi_{t+1}/(1+r)$  を満たす各期の負担率  $\tau_t, \xi_{t+1}$  が得られる。そこで,

$$B_0 = G - \tau_0 w_0 (1 - h_0) L_0$$

$$B_{t+1} = (\tau_t - \theta_t) I_t (1+r) - \tau_{t+1} I_{t+1} + (1+r) B_t, \quad t = 0, 1, \dots$$

と  $B_t, t = 0, 1, \dots$  を定義すれば,

$$G = \tau_0 w_0 (1 - h_0) L_0 + B_0$$

$$\theta_t I_t = B_t - \frac{B_{t+1}}{1+r} + \tau_t I_t - \frac{\tau_{t+1} I_{t+1}}{1+r}, \quad t = 0, 1, \dots$$

となり, 各期の国債を含む政府の予算を満たしている。さらに,

$$\begin{aligned} \theta_0 I_0 + \dots + \frac{\theta_n I_n}{(1+r)^n} &= B_0 + \tau_0 I_0 - \frac{\tau_{n+1} I_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} - \frac{B_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \\ &= G - \frac{\tau_{n+1} I_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} - \frac{B_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \end{aligned}$$

である。  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\tau_{n+1} I_{n+1}/(1+r)^{n+1} \rightarrow 0$  であり,  $\sum_{t=0}^{\infty} \theta_t I_t / (1+r)^t = G$  であるから, 非ポソジゲーム条件

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{(1+r)^t} = 0$$

を満たす。 ■

上の補助定理は, (11) を満たす  $(\theta_t)_{t=0}^{\infty}$  が空でないことを保証するものではない。我々は次の仮定をおく。

**仮定 3**  $\sum_{t=0}^{\infty} I_t / (1+r)^t > G$  が成立する。

一方, 級数  $\sum_{t=0}^{\infty} I_t / (1+r)^t$  が有限であることは, 以下で示される。

**注意** 非ポソジゲーム性がなく, かつ,  $1+r = (1+g_t)(1+n_t)$  であっても, 補助定理 2 の含意は有効である。つまり,  $\lim_{t \rightarrow \infty} B_t / (1+r)^t = b$  かつ  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_t I_t / (1+r)^t = g$  であれば, (11) に代わる制約は,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\theta_t I_t}{(1+r)^t} = G - g - b$$

となる。

### 3 社会的厚生を最大化

間接効用を用いて、次のように社会的厚生を定義する。

$$W(\theta_0, \theta_1, \dots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t V_t(\theta_t, r),$$

$$\beta_0 = L_0, \quad \beta_t = \frac{L_0 \prod_{j=0}^{t-1} (1 + n_j)}{(1 + R)^t}, t = 1, 2, \dots$$

とする。ここで、 $R$  は社会厚生における時間選好率である。前節の結果を用いると、

$$W(\theta_0, \theta_1, \dots) = \mu \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t \{(1 - \theta_t) w_t\}^m, \quad \mu = u(c_1(1, r), c_2(1, r), h_t(1, r))$$

である。また、

$$I_t = (1 - h_t((1 - \theta_t) w_t, r)) w_t L_t = (1 - h(1, r)) w_t L_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

であるから、 $I_t$  はコンスタントと見ることができる。

以上の準備のもとで、次の最適年金制度を求める問題

$$\max_{\theta_0, \theta_1, \dots} W(\theta_0, \theta_1, \dots) \text{ subject to } \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\theta_t I_t}{(1 + r)^t} = G$$

を考えることができる。 $\gamma_t = I_t / (1 + r)^t, t = 0, 1, 2, \dots$  とすれば、これは、

$$\max_{\theta_0, \theta_1, \dots} \mu \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t \{(1 - \theta_t) w_t\}^m \text{ subject to } \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t \theta_t = G, \quad \theta_t \leq 1, \quad t = 0, 1, \dots \quad (13)$$

である。ここでは、 $\theta_t < 0$  をも許容しておく。

**仮定 4** (13) の解  $(\theta_t^*)_{t=0}^{\infty}$  が存在すると仮定する。

これは  $R$  が適切な大きさであることを要求している。以下、3.1 節では  $m < 1, m \neq 0$  のケースを、3.2 節では  $1 \leq m$  のケースを順に検討する。

### 3.1 $m < 1$ かつ $m \neq 0$ のケース

$\partial V/\partial \theta_t(\theta_t, r) = -\mu m(1 - \theta_t)^{m-1} w_t^m$  である。よって、 $\lim_{\theta_t \rightarrow 1} \partial V/\partial \theta_t(\theta_t, r) = -\infty$  であるから、 $\theta_t^* = 1$  となる  $t$  は存在しない<sup>2</sup>。したがって、(13) の解は内点解であり

$$\mu m w_t \beta_t \{(1 - \theta_t^*) w_t\}^{m-1} = \delta \gamma_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

を満たす。 $\mu, \delta$  を消去すれば、

$$\begin{aligned} \frac{w_t}{w_{t+1}} \frac{\beta_t \{(1 - \theta_t) w_t\}^{m-1}}{\beta_{t+1} \{(1 - \theta_{t+1}) w_{t+1}\}^{m-1}} &= \frac{\gamma_t}{\gamma_{t+1}} \\ \frac{1 - \theta_t^*}{1 - \theta_{t+1}^*} &= (1 + g_t) \left( \frac{1 + R}{1 + r} \right)^{1/(1-m)}, \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

を得る<sup>3</sup>。したがって、

$$\theta_t^* > \theta_{t+1}^*, \quad \text{iff} \quad (1 + g_t) \left( \frac{1 + R}{1 + r} \right)^{1/(1-m)} < 1 \quad (14)$$

が得られる。一般に、二つの時点  $t, t' (t < t')$  について比較すると、

$$\frac{1 - \theta_t^*}{1 - \theta_{t'}^*} = \left( \frac{1 + R}{1 + r} \right)^{(t'-t)/(1-m)} \prod_{j=t}^{t'-1} (1 + g_j) \quad (15)$$

である。

この結果は世代間の負担の比較について次のような意味を持っている。

**定理 1** 効用関数の消費に関する同次性について  $m < 1$ ,  $m \neq 0$  が成立する時、世代間の最適な負担の比較について次の諸性質が成立する。

<sup>2</sup> $m < 0$  の場合には、効用関数の単調性と同次関数の性質より、効用の値は負である。したがって、 $\mu < 0$  となり、 $\mu m > 0$  であることに注意せよ。 $m < 0$  の効用関数は例えば、

$$\sum_{i=s}^n (1 + \delta)^{-(i-s)} \frac{c_s^{1-1/\nu}}{1 - 1/\nu}, \quad \nu < 1$$

の形で、年金のシミュレーションではよく利用される。第四節も参照せよ。また、 $m > 0$  の場合には、 $\mu > 0$  であり、同様に  $m\mu > 0$  である。

<sup>3</sup>次の関係に注意せよ。

$$\frac{w_t}{w_{t+1}} = \frac{1}{1 + g_t}, \quad \frac{\gamma_t}{\gamma_{t+1}} = \frac{1 + r}{(1 + g_t)(1 + n_t)}, \quad \frac{\beta_t}{\beta_{t+1}} = \frac{1 + R}{1 + n_t}.$$

- (i) 賃金の成長率に変化がないものとすれば，社会的な時間選好率が市場の時間選好率より高い (*resp.* 低い)，すなわち， $R$  が  $r$  より ( $r$  が  $R$  より) 大きければ大きいほど過去の世代 ( $t$  世代) の負担率よりも相対的に将来世代 ( $t'$  世代) の負担率を高く (低く) することが望ましい。
- (ii) 利子率や社会的な時間選好率に変化がないものとすれば，賃金の上昇率の高い世代の負担率は低い負担率であることが望ましい。
- (iii) 人口成長率の大小は世代間の負担の大小には影響を及ぼさない。

(iii) の持つ意味は重要である。世代の最適負担の比較に関する限り，人口の変動率は年金負担について中立的であるべきだということを主張している。また，(ii) は賃金上昇率の低い世代に対する負担を高くすべきであるという結論であり，「年金負担について，逆進的な制度が望ましい」ことを主張している。

定理 1 に，二つの注意をしておきたい。一つは，定理 1 が 2 世代の最適年金の比較においては人口成長が影響しないと言っていることである。すなわち，負担の絶対額に影響しないと主張しているわけでないことである。また，その第二は，(i) は最適解が存在すれば成立するという内容であり，したがって， $r > R$  の事実が解の存在や問題の設定に整合的であるかは現在のところ判定できていないという点がある。

人口の変動率がどのような影響を及ぼすか，そして，(i) の結果がどれだけ最適性を語るものとなるかは，負担率の相対的な値では必ずしも明らかではない。それらを知るために陽表解を求めてみよう。(15) より， $t = 1, 2, \dots$  について，

$$1 - \theta_t^* = \alpha_t(1 - \theta_0^*),$$

$$\alpha_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\prod_{j=0}^{t-1} (1 + g_j)} \left( \frac{1 + r}{1 + R} \right)^{t/(1-m)} = \frac{w_0}{w_t} \left( \frac{1 + r}{1 + R} \right)^{t/(1-m)},$$

となる。ここで， $\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$  である。最適年金問題の制約条件を用いて， $\alpha$  を次のように定義する。

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t \alpha_t.$$

すると,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t - G = \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t (1 - \theta_t^*) = \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t \alpha_t (1 - \theta_0^*)$$

となる。したがって,

$$\theta_0^* = 1 - \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j - G}{\alpha} \quad (16)$$

$$\theta_t^* = 1 - \alpha_t \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j - G}{\alpha}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (17)$$

のように解ける。

ここで,  $\alpha, \gamma = \sum \gamma_j$  の値が存在すると想定して, 議論を続ける。  $\alpha, \gamma$  の存在に関する考察は以下のサブセクション 3.1.1 と 3.1.2 で行う。

$x = ((1+r)/(1+R))^{1/(1-m)}$  とすれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial n_i} &= \frac{I_0}{1+n_i} \left( \prod_{j=0}^i \frac{1+n_j}{1+r} x^{i+1} + \prod_{j=0}^{i+1} \frac{1+n_j}{1+r} x^{i+2} + \dots \right) \\ \frac{\partial \gamma}{\partial n_i} &= \frac{I_0}{1+n_i} \left( \prod_{j=0}^i \frac{(1+g_j)(1+n_j)}{1+r} + \prod_{j=0}^{i+1} \frac{(1+g_j)(1+n_j)}{1+r} + \dots \right) \end{aligned}$$

である。これらの式の対応する項を比較すると

$$\prod_{j=0}^{t-1} \frac{1+n_j}{1+r} x^t - \prod_{j=0}^{t-1} \frac{(1+g_j)(1+n_j)}{1+r} = \prod_{j=0}^{t-1} \frac{1+n_j}{1+r} \left( x^t - \prod_{j=0}^{t-1} (1+g_j) \right)$$

となる。したがって, このとき, 各  $t = i+1, i+2, \dots$  について,

$$x \leq \left( \prod_{j=0}^{t-1} (1+g_j) \right)^{1/t} = 1 + \bar{g}_t$$

となる条件を想定する。  $\bar{g}_t$  は  $t$  年間の実質賃金の平均的な成長率である。このとき,

$$0 < \frac{\partial \alpha}{\partial n_i} \leq \frac{\partial \gamma}{\partial n_i}$$

を得る。

具体的には,  $x$  が小さくなく,  $i+1$  世代以降の賃金の成長率が大きいとする。このとき,  $n_i$  の増加は,  $\gamma$  を  $\alpha$  よりも大きく増加させ, 従って,  $(\gamma - G)/\alpha$  を上昇させる。したがって, 負担率を全般的に減少させることになる。これらの結果をまとめると,

**定理 2** 効用関数の消費に関する同次性についてのパラメータについて  $m < 1$ ,  $m \neq 0$  が成立する時, 世代の最適な負担率の値について, 次の諸性質が成立する。

- (iv) 各世代の最適な年金負担率は (16) と (17) で表現される。
- (v) 市場と社会の時間選好率の比率を  $x = ((1+r)/(1+R))^{1/(1-m)}$ , ゼロ期から第  $i$  世代までの平均的な実質賃金成長率を  $\bar{g}_{i+1}$  とする。  
 $x < 1 + \bar{g}_{i+j}, j = 1, 2, \dots$  が成立すれば, 第  $i$  世代の人口成長率の上昇は各最適年金の負担率を減少させる。

定理 1, 2 によって, 最適な年金の世代間の相対的な比較と, その負担率の値についての性質が明らかになった。次に検討したいことは, 最適年金の時系列的な動きである。

### 3.1.1 $\sum_j \gamma_j$ の値

(16), (17) に現れる  $\sum \gamma_j$  の値について考察する。仮定 2 と定義により,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j &= I_0 + \frac{I_1}{1+r} + \frac{I_2}{(1+r)^2} + \dots \\ &< w_0 L_0 (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{w_0 L_0}{1-q} < \infty \end{aligned}$$

となり,  $\sum \gamma_j - G$  の値は存在する。

### 3.1.2 $\alpha$ と $\alpha_t$ の値

解  $(\theta_t^*)_{t=0}^{\infty}$  は budget (11) を満たすから,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j - G = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \theta_0^*) \sum_{j=0}^t \gamma_j \alpha_j$$

である。 $\theta_0^* \leq 1$  が成立している。 $\theta_0^* = 1$  の場合, 右辺はゼロである。左辺は正值なので, これは矛盾である。したがって,  $\theta_0^* < 1$  でなければならない。さらに,  $\alpha = \sum_t \gamma_t \alpha_t = \infty$  の場合には, 右辺は無限大になり, 仮定 2 に矛盾する。したがって,  $\alpha < \infty$  でなければならない。

$\alpha < \infty$  となるための条件を確定しておきたい。

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t \gamma_t \\ &= I_0 \left( 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \left( \frac{1+r}{1+R} \right)^{t/(1-m)} \prod_{j=0}^{t-1} \frac{1+n_j}{1+r} \right)\end{aligned}$$

となる。いま、 $x = ((1+r)/(1+R))^{1/(1-m)}$ 、 $a_0 = 1$ 、 $a_t = \prod_{j=0}^{t-1} (1+n_j)/(1+r)$ 、 $t = 1, 2, \dots$  とする。すると、

$$\frac{\alpha}{I_0} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

となる。この右辺は  $x$  のべき級数である。Cauchy-Hadamard の定理によって、このべき級数の収束半径  $k$  は、

$$\frac{1}{k} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |a_t|^{1/t}$$

である<sup>4</sup>。また、十分大きな  $t$  について、

$$a_t^{1/t} = \left( \frac{(1+n_0) \times \dots \times (1+n_{t-1})}{(1+r)^t} \right)^{1/t} \leq q$$

が成立する<sup>5</sup>。したがって、 $k \geq 1/q (> 1)$  である。以上の考察によって、

(A)  $x > k$  であれば、 $\alpha = \infty$  である。

(B)  $x < k$  であれば、 $0 < \alpha < \infty$  である。

である。仮定 2 によって排除された  $\alpha = \infty$  の可能性は、(A) を排除することを意味している。さらに、

$$\frac{\alpha_t}{\alpha} = \frac{(w_0/w_t)x^t}{I_0(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)}$$

である。 $w_t$  は  $w$  に収束することと (B) を利用して、最適年金の時間的な数値を決定するパラメータは、

(ア)  $k > x > 1$  であれば、 $\alpha_t/\alpha \rightarrow \infty$

<sup>4</sup>吉田洋一 [15], 15 page 参照

<sup>5</sup>この「十分大きな  $t$  という制約が必要である」という点は、石田良氏 (財務省財務総合政策研究所) よりご指摘いただいた。

(イ)  $1 = x$  であれば,  $\alpha_t/\alpha \rightarrow \left\{ (w(1-h) \sum_{j=0}^{\infty} a_j) \right\}^{-1}$

(ウ)  $1 > x > 0$  であれば,  $\alpha_t/\alpha \rightarrow 0$

の三つのケースに分かれる。

今, 人口成長率の 0 期から  $t-1$  期までの  $t$  期間の平均値を  $\bar{n}_t$  と書けば,

$$((1+n_0) \times \cdots \times (1+n_{t-1}))^{1/t} = 1 + \bar{n}_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

である。もし, 列  $\bar{n}_t, t = 1, 2, \dots$  が  $\bar{n}$  に収束するならば,

$$k = \frac{1+r}{1+\bar{n}} > \frac{1}{q}$$

である。

### 3.1.3 $\theta_t^*$ の値

上の (ア) - (ウ) に応じて, 各世代の負担率は次のようになる。 $r$  は市場利子率であるから, 市場における時間選好率を表現している。したがって,  $x$  は市場と社会の時間選好率の比率である。

(ア)  $k > x > 1$  とする。このとき,

$$\theta_0^* > 0, \exists \bar{t} : \forall t \geq \bar{t}, \theta_t^* < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_t^* = -\infty$$

となる。 $x^{1-m} = (1+r)/(1+R)$  であるので,  $x > 1$  は  $r > R$  を意味している。このとき, 社会の時間選好率は市場の時間選好率よりも低く, 市場が社会よりも近視眼的である場合である。この時, 現世代に負担をさせ, 将来の世代の負担を軽くすると同時に補助を与えることが望ましい, という結果になる。

(イ)  $x = 1$  とする。これは, 社会の時間選好率と市場の時間選好率が一致し, 社会が市場を信頼をしている状況である。各世代の負担率  $\theta_t^*$  は次の通りである。

$$\theta_0^* = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(1+n_j)(1+g_j)}{(1+r)} - G/I_0}{\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(1+n_j)}{(1+r)}}$$

$$\theta_t^* = 1 - \frac{1}{\prod_{j=0}^{t-1} (1+g_j)} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(1+n_j)(1+g_j)}{(1+r)} - G/I_0}{\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(1+n_j)}{(1+r)}}$$

これによると,  $g_t > 0$ ,  $g_t = 0$ ,  $g_t < 0$  であれば, それぞれ,

$$\theta_t^* < \theta_{t+1}^*, \theta_t^* = \theta_{t+1}^*, \theta_t^* > \theta_{t+1}^*$$

が成立しなければならない。また,  $\theta_t^*$  はある正值  $\theta^*$  に収束する。

$$\theta^* = 1 - \frac{1}{\prod_{j=0}^{\infty} (1 + g_j)} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(1+n_j)(1+g_j)}{(1+r)} - G/I_0}{\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(1+n_j)}{(1+r)}}$$

(ウ)  $x < 1$  とする。これは, 社会の時間選好率が市場のそれに比べて高く, 社会が市場より近視眼的であることを意味する。各世代の負担率  $\theta_t^*$  は次の通りである。このとき,

$$\theta_t^* \rightarrow 1 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

となり, 将来の世代に負担を送っていくことが良いと判断されることになる。

**定理 3** 効用関数の消費に関する同次性についてのパラメータについて  $m < 1$ ,  $m \neq 0$  が成立する時, 世代の最適な負担率の時系列の値について, 次の諸性質が成立する。

- (vi) 市場の時間選好率が社会の時間選好率を超える場合, 最適年金の負担はある世代以降は負値を取り, 将来の消費を大きくすることが望ましい。
- (vii) 市場と社会の時間選好率が一致する場合, 最適な負担率はある値に収束する。
- (viii) 市場の時間選好率が社会のそれを下回る場合, 将来世代の負担を 100% に近づけていくことが望ましい。

上の結果の中の (vii) は Barro [3], [4], Bohn [5] の税の平準化定理の拡張と解釈できる。実際第一に, これらの研究では  $R = r$  は前提とされ, (vii) の前提  $x = 1$  と同じである。第二に, 現在のモデルで  $G$  は期初に与えられているが, 各期の政府支出の合計 (割引価値) としても全く議論が適用可能である。最後に, 負担率の収束先  $1 - (\sum \gamma_j - G) \{ (w(1-h) \sum_{j=0}^{\infty} a_j) \}^{-1}$  が正值であれば, 時間  $t$  が十分大きければ,  $\theta_t^*$  の値はほとんど変わらず, 負担が平準化していることを意味しているからである。

### 3.2 $m > 1$ のケース

これまで (13) の制約条件は  $\theta_t \leq 1$  であったが、ここでは、 $0 \leq \theta_t \leq 1$  を任意の  $t$  について仮定する。まず、 $m > 1$  のケースを想定する。ここで

$$b_t = \frac{\beta_t w_t^m}{\gamma_t}, \quad c_t = b_t(1 - \theta_t)^{m-1} \quad t = 1, 2, \dots$$

を定義する。 $\theta_t, t = 0, 1, \dots$  が制約条件 (13) を満たすとする。いま、二つの  $\theta_t, \theta_{t'}$  について、 $0 < \theta_t < 1, 0 < \theta_{t'} < 1$  であったとする。一般性を失わず、

$$c_t \geq c_{t'} > 0$$

であると考えることができる。このとき、 $\varepsilon > 0$  を十分小さな任意の正の数として、

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_t = \theta_t - \frac{\gamma_{t'}}{\gamma_t} \varepsilon, \\ \tilde{\theta}_{t'} = \theta_{t'} + \varepsilon, \\ \tilde{\theta}_j = \theta_j, \quad \text{if } j \neq t, t' \end{cases} \quad (18)$$

とする。これを  $\varepsilon$ -変換と呼ぶ。そうすると、

$$\gamma_t \tilde{\theta}_t + \gamma_{t'} \tilde{\theta}_{t'} = \gamma_t \left( \theta_t - \frac{\gamma_{t'}}{\gamma_t} \varepsilon \right) + \gamma_{t'} (\theta_{t'} + \varepsilon) = \gamma_t \theta_t + \gamma_{t'} \theta_{t'}$$

であるから、 $\tilde{\theta}_j, j = 0, 1, \dots$  は (13) の制約条件を満たす。テーラーの定理により、ある  $0 < \eta < 1$  が存在して、

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} W(\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \dots) - \sum_{n=1}^{\infty} W(\theta_0, \theta_1, \dots) \\ &= m\varepsilon \gamma_{t'} \{ c_t (1 - \theta_t + \eta \varepsilon \gamma_{t'} / \gamma_t)^{m-1} - c_{t'} (1 - \theta_{t'} - \eta \varepsilon)^{m-1} \} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $m > 1, c_t \geq c_{t'} > 0$  であったから、

$$b_{t'}(1 - \theta_{t'})^{m-1} = c_{t'} \leq c_t = b_t(1 - \theta_t)^{m-1}$$

であるから、十分小さな  $\varepsilon > 0$  にたいして、

$$b_{t'}(1 - \theta_{t'} - \eta \varepsilon)^{m-1} < c_{t'} \leq c_t < b_t(1 - \theta_t + \eta \varepsilon \gamma_{t'} / \gamma_t)^{m-1}$$

が成立する。したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} W(\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \dots) - \sum_{n=1}^{\infty} W(\theta_0, \theta_1, \dots) > 0$$

である。従って、(13) の解  $\theta_t^*, t = 0, 1, \dots$  においては

$$\#\{i | 1 > \theta_i^* > 0\} \leq 1$$

でなければならない。これは、最適負担率はせいぜい一つの例外を除いて、1 または 0 であることを意味し、解が端点解であることを意味している。

**定理 4** 効用関数の消費に関する同次性についてのパラメータについて  $m > 1$  が成立する時、世代の最適な負担率  $\theta_t^*, t = 0, 1, \dots$  はせいぜい一つの例外を除いて、1 または 0 である。

### 3.3 $m = 1$ のケース

これまで (13) の制約条件は  $\theta_t \leq 1$  であったが、ここでは、 $0 \leq \theta_t \leq 1$  を任意の  $t$  について仮定する。ここで

$$b_t = \frac{\beta_t w_t}{\gamma_t}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

を定義する。

以下、 $r \neq R$  と  $r = R$  の 2 ケースに分けて考察する。

#### 3.3.1 $r \neq R$ の場合

このとき、

$$\begin{aligned} b_t &= \frac{\beta_t w_t}{\gamma_t} = \frac{L_0 \frac{\prod_{j=0}^{t-1} (1+n_j)}{(1+R)^t} w_0 \prod_{j=0}^{t-1} (1+g_j)}{I_t / (1+r)^t} \\ &= \left( \frac{1+r}{1+R} \right)^t \frac{1}{1-h}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

となる。つまり、 $b_t \stackrel{\text{def}}{=} \beta_t w_t / \gamma_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$  は厳密に単調である。単調増加である場合は無限大に発散し、単調減少である場合はゼロに収束する。また、仮定 2  $(1 + n_t)(1 + g_t) / (1 + r) < q < 1$  より

$$\gamma_t = \gamma_{t-1} \frac{(1 + n_{t-1})(1 + g_{t-1})}{1 + r} < \gamma_{t-1}$$

となる。したがって、 $\gamma_t, t = 1, 2, \dots$  は厳密に減少的である。同時に、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t = 0$  である。

**補助定理 3**  $\theta_t, t = 0, 1, \dots$  を予算  $\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t \theta_t = G$  を満たす任意の負担率とする。いま、二つの  $t, t'$  について

$$b_t = \frac{\beta_t w_t}{\gamma_t} > b_{t'} = \frac{\beta_{t'} w_{t'}}{\gamma_{t'}}, \quad 0 < \theta_t \leq 1, \quad 0 \leq \theta_{t'} < 1$$

であれば、 $\tilde{\theta}_t = 0$  または  $\tilde{\theta}_{t'} = 1$  のどちらかが成立するまで  $\varepsilon$ -変換における  $\varepsilon$  を大きくすれば厚生は増加する。

**証明**  $\theta_t, t = 0, 1, \dots$  を予算  $\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t \theta_t = G$  を満たすとする。いま、二つの  $t, t'$  について

$$b_t = \frac{\beta_t w_t}{\gamma_t} > b_{t'} = \frac{\beta_{t'} w_{t'}}{\gamma_{t'}}, \quad 0 < \theta_t \leq 1, \quad 0 \leq \theta_{t'} < 1$$

であったとする。 $b_{t'} > 0$  であるから、(18) に従って  $\tilde{\theta}_k, k = 0, 1, \dots$  を定義する。これらが予算を満たしていることは以前と同様である。さらに、

$$\begin{aligned} & \beta_t w_t (1 - \tilde{\theta}_t) + \beta_{t'} w_{t'} (1 - \tilde{\theta}_{t'}) - \{\beta_t w_t (1 - \theta_t) + \beta_{t'} w_{t'} (1 - \theta_{t'})\} \\ &= \beta_t w_t (\theta_t - \tilde{\theta}_t) + \beta_{t'} w_{t'} (\theta_{t'} - \tilde{\theta}_{t'}) \\ &= \varepsilon \gamma_{t'} (b_t - b_{t'}) > 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\tilde{\theta}_t = 0$  または  $\tilde{\theta}_{t'} = 1$  のどちらかが成立するまで  $\varepsilon$  を大きくすることが社会厚生を大きくする。■

補助定理 3 によって、厚生を最大化の解を見つけるために検討すべき負担率の範囲を、せいぜい 1 世代の負担率を除いて、各世代の負担率を 1 または 0 となるものに制限して良いことがわかる。

仮定 3 により、任意の自然数  $n$  について

$$G < \sum_{t=0}^n \gamma_t + \sum_{t=n+1}^{\infty} \gamma_t$$

である。以下で、自然数の集合  $U, Z$  そしてある番号  $\bar{t}$  を定義する。

最初に、 $b_t, t = 0, 1, \dots$  が単調増加である場合を取り上げる。

$$I = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \sum_{t=0}^n \gamma_t \geq G \right\}$$

である。 $I \neq \emptyset$  は自明である。集合  $I$  の first element を  $\bar{t}$  とする。 $U = \{0, 1, \dots, \bar{t}\}$ ,  $Z = \{\bar{t} + 1, \bar{t} + 2, \dots\}$  を定義する。

次に、 $b_t, t = 0, 1, \dots$  が単調減少である場合を取り上げる。

$$J = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \sum_{t=n}^{\infty} \gamma_t \geq G \right\}$$

とする。 $I \neq \emptyset$  であるから、集合  $J$  の last element を  $\bar{t}$  とする。last element の存在は、実数列、 $s_n = \sum_{t=n}^{\infty} \gamma_t, n = 0, 1, \dots$  とすれば、 $s_0 > G$  かつ  $s_n$  は単調にゼロに収束することから自明である。 $Z = \{0, 1, \dots, \bar{t} - 1\}$ ,  $U = \{\bar{t}, \bar{t} + 1, \dots\}$  を定義する。

上で定義された  $U, Z$  に対して、

$$\text{if } t \in U, t' \in Z \text{ then } b_t < b_{t'} \quad (19)$$

$$\text{if } t \in U \setminus \{\bar{t}\} \text{ then } b_t < b_{\bar{t}} \quad (20)$$

が成立している。

**補助定理 4** 上で得られた  $U, Z, \bar{t}$  を利用して、

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_j &= 0, & \text{if } j \in Z \\ &= 1, & \text{if } j \in U \setminus \{\bar{t}\} \\ &= \frac{G - \sum_{h \in U \setminus \{\bar{t}\}} \gamma_h}{\gamma_j}, & \text{if } j = \bar{t} \end{aligned}$$

は (13) の解である。

**補助定理 4 の証明**

**Step 1:**  $(\hat{\theta}_j)_{j=0}^{\infty}$  は予算制約を満たす。

$U, Z, \bar{t}$  の定義によって

$$\sum_{j \in U} \gamma_j \geq G > \sum_{j \in U \setminus \{\bar{t}\}} \gamma_j$$

が成立している。よって、 $\hat{\theta}_{\bar{t}}$  の定義によって、

$$G = \sum_{j \in U \setminus \{\bar{t}\}} \gamma_j + \hat{\theta}_{\bar{t}} \gamma_{\bar{t}}, \quad 0 < \hat{\theta}_{\bar{t}} \leq 1$$

となる。したがって、 $(\hat{\theta}_j)_{j=0}^{\infty}$  は予算制約を満たす。

**Step 2** 厚生最大化の解を  $\theta_t^*, t = 0, 1, \dots$  とする。このとき、 $P = \{t \mid \theta_t^* > 0\}$  とすれば、 $P \subset U$  or  $U \subset P$  が成立する。

補助定理 3 より、 $(\theta_j^*)_{j=0}^{\infty}$  はせいぜい一つを除いて、0 か 1 の値を取っている。 $t, t' \in \mathbb{N}$  が存在して  $t \in U \setminus P, t' \in P \setminus U$  であったとする。このとき、 $t \in U, t' \in Z$  であるから、(19) によって、

$$b_{t'} > b_t \quad 1 \geq \theta_{t'}^* > 0, \theta_t^* = 0$$

である。このとき、 $t, t'$  に着目して、(18) によって  $\theta_k^*, k = 0, 1, \dots$  から  $\tilde{\theta}_k^*, k = 0, 1, \dots$  を作れば、厚生を増加させることができる。これは矛盾である。したがって、

$$P \subset U \text{ or } U \subset P$$

でなければならない。

**Step 3**  $P \subset U$  が成立する。

$U = P$  ならば、 $P \subset U$  が成立しているので、 $U \subsetneq P$  と仮定する。

$$\sum_{t \in U \setminus \{\bar{t}\}} \gamma_t + \hat{\theta}_{\bar{t}} \gamma_{\bar{t}} = \sum_{t \in U} \hat{\theta}_t \gamma_t = G = \sum_{t \in P} \theta_t^* \gamma_t \quad (21)$$

であるので、ある  $t \in U$  が存在して、 $1 \geq \hat{\theta}_t > \theta_t^* > 0$  である。また、 $t' \in P \setminus U$  とすれば、 $t \in U, t' \in Z$  であるから、(19) によって、

$$b_{t'} > b_t \quad \text{かつ} \quad 1 > \theta_{t'}^* > 0 \quad \text{かつ} \quad 1 \geq \theta_{t'}^* > 0$$

である。補助定理 3 よりこれは最適性に矛盾する。

**Step 4**  $P = U$  である。

$P \neq U$  と仮定する。 $P \subset U \setminus \{\bar{t}\}$  であれば、 $\sum_{t \in P} \theta_t^* \gamma_t < G$  となり矛盾である。また、 $P \subset U \setminus \{\bar{t}\}$  がある  $t \in U$  に成立すれば、 $\theta_t^* = 0$  かつ  $\theta_{\bar{t}}^* > \hat{\theta}_{\bar{t}}$  である。 $t, \bar{t}$  について、(20) によって、

$$b_{\bar{t}} > b_t \quad \text{かつ} \quad 1 \geq \theta_{\bar{t}}^* > 0 \quad \text{かつ} \quad \theta_t^* = 0$$

となっている。補助定理 3 よりこれは最適性に矛盾する。

以上によって、 $\theta_t^* = \hat{\theta}_t, t = 0, 1, \dots$  が示された。■

### 3.3.2 $r = R$ の場合

$$\frac{\beta_t w_t}{\gamma_t} = z, \quad t = 1, 2, \dots$$

が成立している。 $\theta_t, t = 0, 1, \dots$  を制約  $\sum_{t=0}^{\infty} \theta_t \gamma_t = G$  を満たす任意の負担率とする。このとき、

$$\begin{aligned} W(\theta_0, \theta_1, \dots) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t w_t (1 - \theta_t) = \sum_{t=0}^{\infty} z \gamma_t (1 - \theta_t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} z \gamma_t - \sum_{t=0}^{\infty} z \gamma_t \theta_t = z \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t - zG \end{aligned}$$

となり、社会的厚生は一定値である。したがって、どのように負担率を決定しても、社会厚生には変化がない。

以上の結果を定理の形にまとめておこう。

**定理 5**  $m = 1$  のとき、最適負担率は次の性質を持つ。社会的時間選好率と利子率が一致する場合 ( $R = r$ )、どのような負担率であっても最適である。社会的時間選好率と利子率が異なる場合 ( $R \neq r$ )、負担率をゼロにした時の厚生への貢献分に対する所得の現在価値  $\beta_t w_t / \gamma_t$  の高い世代は負担率をゼロとし、低い世代から順に負担率を 100% とし、予算を満たすようにするのが望ましい。

## 4 積み立て方式への適用

これまで賦課方式を前提として議論してきた。それは、現在の日本の年金制度がほぼ賦課方式として運営されているからである。現在の設定に積み立て方式を組み込めばどうなるかを考察しておきたい。

まず、家計の予算制約は、

$$c_{1t} + s_t = (1 - \tau_t) w_t (1 - h_t), \quad c_{2t+1} = (1 + r) s_t + (1 + r - d_t) \tau_t w_t (1 - h_t)$$

である。年金の掛け金は  $\tau_t w_t (1 - h_t)$  であるが、その元利合計からある負担部分を  $d_t \tau_t w_t (1 - h_t)$  だけを控除されて年金を受け取る制度である。これらを一本の予算にまとめると

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + r} + \left(1 - \frac{\tau_t d_t}{1 + r}\right) w_t h_t = \left(1 - \frac{\tau_t d_t}{1 + r}\right) w_t$$

である。ここで、 $\theta_t$  を実質的な年金負担率として

$$\theta_t = \tau_t d_t / (1 + r)$$

とおく。家計は  $r, w_t, \theta_t$  を所与とし、 $c_{1t}, c_{2t+1}, h_t$  の選択によって効用を最大化する。すなわち、添え字  $t$  を落として書けば、

$$\max u(c_1, c_2, h) \text{ subject to } c_1 + \frac{c_2}{1+r} + (1-\theta)wh = (1-\theta)w$$

である。この最大化問題は賦課方式の時の問題 (3) と同じ類のものである。

賦課方式と積み立て方式が異なるのは政府の予算においてである。まず、政府の予算を公債を処理する会計と、年金を処理する会計に分ける。公債を処理する会計は、次の通りである。

$$G_0 = B_0$$

$$(1+r)B_{t-1} = B_t + d_t \tau_{t-1} w (1 - h_{t-1}) L_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots$$

まず、第ゼロ期に、 $B_0$  の公債を発行し、 $G_0$  の額を年金機関に移管する。その後は、新たな公債発行額  $B_t$  と、年金機関の運用額の戻し金  $d_t \tau_{t-1} w (1 - h_{t-1}) L_{t-1}$  を収入として、前期の公債の元利合計  $(1+r)B_{t-1}$  を支払う。

さらに、年金機関は、

$$P_0 + A_0 = G_0 + \tau_0 w_0 (1 - h_0) L_0,$$

$$(1+r)\tau_{t-1} w_{t-1} (1 - h_t) L_{t-1} + A_t = (1+r)A_{t-1} + \tau_t w_t (1 - h_t) L_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

第ゼロ期に、公債会計から  $G_0$  だけの原資と年金の掛け金  $\tau_0 w_0 (1 - h_0)$  を収入として、年金の給付  $P_0$  と資産の積み立て  $A_0$  をする。それに続く期間では、資産の運用と年金の掛け金  $(1+r)A_{t-1} + \tau_t w_t (1 - h_t)$  から、年金給付、政府への運用益の移転分、そして、資産の積み立て  $(1+r - a_t)\tau_{t-1} w_{t-1} (1 - h_t) + a_t \tau_{t-1} w_{t-1} (1 - h_t) + A_t$  を支出する。

これらの会計を区別せず合算して表記すれば、

$$P_0 + A_0 = B_0 + \tau_0 w_0 (1 - h_0) L_0$$

$$\begin{aligned} (1+r - a_t)\tau_{t-1} w_{t-1} (1 - h_{t-1}) L_{t-1} + A_t + (1+r)B_{t-1} \\ = (1+r)A_{t-1} + \tau_t w_t (1 - h_t) L_t + B_t, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

となる。これを書き直して、ネットの負債を  $\hat{B}_t = B_t - A_t, t = 0, 1, \dots$  とあらわして、

$$\begin{aligned} P_0 &= \hat{B}_0 + \tau_0 w_0 (1 - h_0) L_0 \\ (1 + r - d_t) \tau_{t-1} w_{t-1} (1 - h_{t-1}) L_{t-1} + (1 + r) \hat{B}_{t-1} \\ &= \tau_t w_t (1 - h_t) L_t + \hat{B}_t, \quad t = 1, 2, \dots \\ (\tau_{t-1} - \theta_t) w_{t-1} (1 - h_{t-1}) L_{t-1} + \hat{B}_{t-1} \\ &= \frac{\tau_t w_t (1 - h_t) L_t}{1 + r} + \frac{\hat{B}_t}{1 + r}, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

となる。  $I_t = w_t (1 - h_t) L_t$  と書けば、

$$\begin{cases} 0 = P_0 - \hat{B}_0 - \tau_0 I_0 \\ \theta_0 I_0 = \tau_0 I_0 - \frac{\tau_1 I_1}{1 + r} + \hat{B}_0 - \frac{\hat{B}_1}{1 + r} \\ \frac{\theta_1 I_1}{1 + r} = \frac{\tau_1 I_1}{1 + r} - \frac{\tau_2 I_2}{(1 + r)^2} + \frac{\hat{B}_1}{1 + r} - \frac{\hat{B}_2}{(1 + r)^2} \\ \vdots \\ \frac{\theta_n I_n}{(1 + r)^n} = \frac{\tau_n I_n}{(1 + r)^n} - \frac{\tau_{n+1} I_{n+1}}{(1 + r)^{n+1}} + \frac{\hat{B}_n}{(1 + r)^n} - \frac{\hat{B}_{n+1}}{(1 + r)^{n+1}} \end{cases}$$

となり、よって、

$$\sum_{t=0}^n \frac{\theta_t I_t}{(1 + r)^t} = P_0 - \frac{\tau_{n+1} I_{n+1}}{(1 + r)^{n+1}} - \frac{\hat{B}_{n+1}}{(1 + r)^{n+1}}$$

を得る。これは Theorem 2 と同じ状況である。

したがって、これまでの節で得られた議論は積み立て方式にも同じに適用できる。

## 参考文献

- [1] Auerbach, A.J. and L.J. Kotlikoff (1987) *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] Barro, R.J. (1974) "Are Government Bonds Net Wealth?," *The Journal of Political Economy*, Vol. 82(6), 1095-1117.

- [3] Barro, R.J. (1979) “On the Determination of the Public Debt,” *Journal of Political Economy*, Vol.87, 940-971.
- [4] Barro, R.J. (1999) “Notes on Optimal Debt Management,” *Journal of Applied Economics*, Vol.2, 281-289.
- [5] Bohn, H. (1990) “Tax Smoothing with Financial Instruments,” *American Economic Review*, Vol.80, 1217-1230.
- [6] Diamond, P.A. (1965) “National Debt in A Neo-classical Growth Model,” *American Economic Review*, Vol.55, 1125-1150.
- [7] Feldstein, M. (1995) “Would privatizing social security raise economic welfare?,” NBER. Working Paper, No.5281.
- [8] Feldstein, M. (1998) “The effect of privatizing social security on economic welfare: Appendix to the Introduction,” in M. Feldstein ed., *Privatizing Social Security*, The University of Chicago Press, 1-29.
- [9] Horioka, C. Y. (2002) “Are the Japanese Selfish, Altruistic, or Dynastic?,” *The Japanese Economic Review*, Vol.53(1), 26-54.
- [10] Judd, K.L. (1999) “Optimal taxation and spending in general competitive growth models,” *Journal of Public Economics*, Vol.71, 1-26.
- [11] Samuelson, P.A. (1958) “An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money,” *Journal of Political Economy*, Vol.66, 467-482.
- [12] 小黒一正, 中軽米寛子, 高間茂治 (2007) 「社会保障の「世代間格差」とその解決策としての「世代間の負担平準化」—介護保険における「積立勘定」の補完的導入を例に—」, 財務省総合研究所 Discussion Paper Series 07A-5
- [13] 小黒一正 (2008) 「社会保障の「世代間格差」とその解決策としての「世代間の負担平準化」」『季刊社会保障研究』224-233。
- [14] 高山憲之・麻生良文・宮地俊行・神谷佳孝 (1996) 「家計資産の蓄積と遺産・相続の実態」, 高山・チャールズ・ユウジ・ホリオカ・太田清編 『高齢化社会の貯蓄と遺産・相続』, 日本評論社.

[15] 吉田洋一 (1965) 『函数論 第2版』 岩波全書。